UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MEDICIÓN E INSTRUMENTACIÓN

FILTROS

Roberto Giovanni Ramírez-Chavarría

RRamirezC@iingen.unam.mx

Facultad de Ingeniería, UNAM

Semestre 2020-2

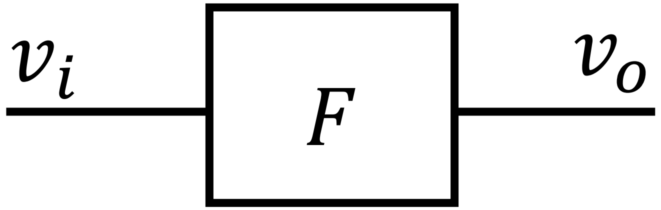
Filtraje de señales

UNAM

- **Filtrar:** Atenuar la amplitud de una señal

  Reducir el ancho de banda al estrictamente necesario

  “Eliminar” señales no deseadas



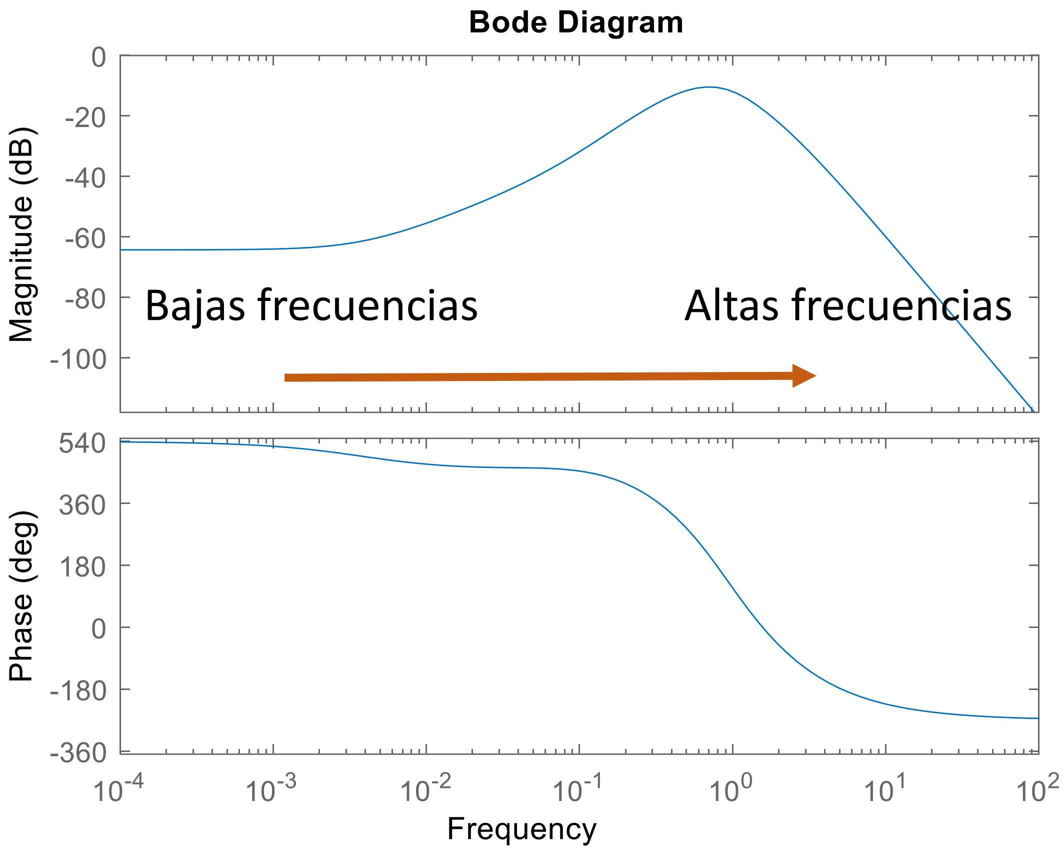
v_i: Señal de entrada

v_o: Señal filtrada

F: Filtro -> Dispositivo electrónico que discrimina las señales que bloquea o deja pasar en función de la frecuencia.

Filtraje de señales

- El estudio de los filtros se hace en el dominio de la frecuencia con diagramas de bode.



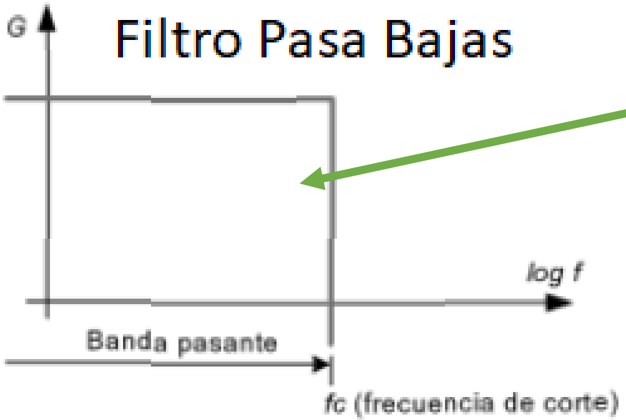
Filtraje de señales

UNAM

- **TIPOS DE FILTROS**

De acuerdo con la banda de frecuencias que un filtro deja pasar, hay 4 tipos

1. Filtro Pasa Bajas (*Low-pass filter*)



Solo las señales en esta banda (bajas frecuencias) "pasan".

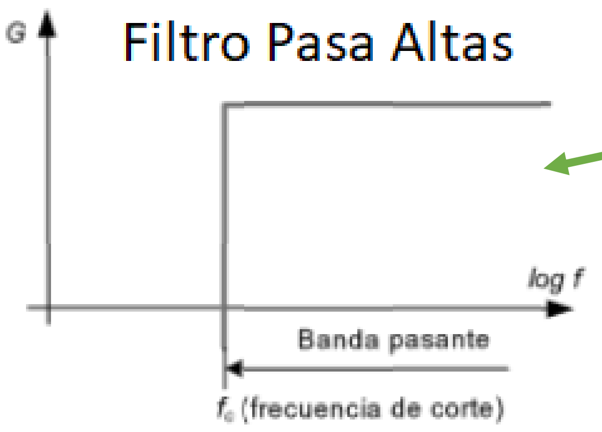
Pone un límite superior (**frecuencia de corte**) a la máxima frecuencia que deja pasar

Filtraje de señales

- **TIPOS DE FILTROS**

De acuerdo con la banda de frecuencias que un filtro deja pasar, hay 4 tipos

2. Filtro Pasa Altas (*High-pass filter*)



Solo las señales en esta banda (altas frecuencias) "pasan".

Limita la mínima frecuencia (**frecuencia de corte**) que deja pasar

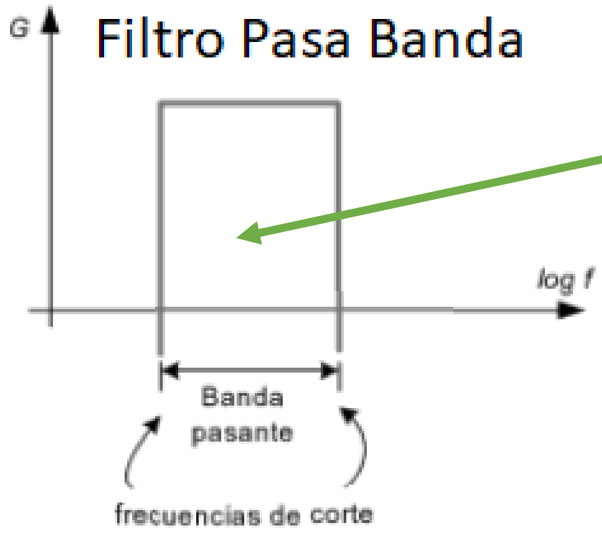
UNAM

Filtraje de señales

- **TIPOS DE FILTROS**

De acuerdo con la banda de frecuencias que un filtro deja pasar, hay 4 tipos

3. Filtro Pasa Banda (*Band-pass filter*)



Solo las señales en esta banda (entre las frecuencias de corte) "pasan".

Pone una cota tanto por arriba como por debajo de las frecuencias que deja pasar.

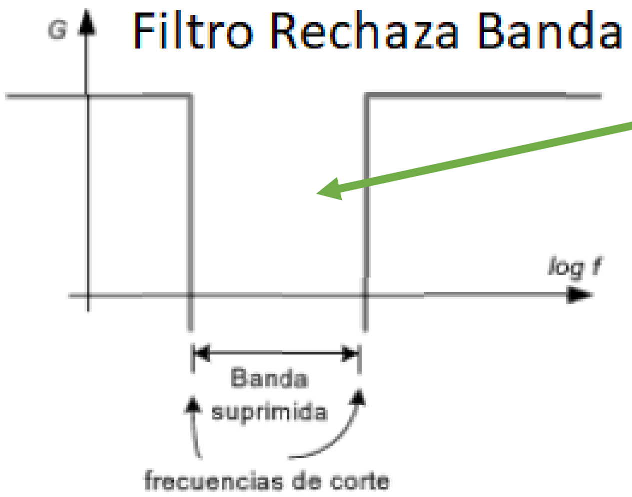
* Hay 2 frecuencias de corte, mínima y máxima

Filtraje de señales

- **TIPOS DE FILTROS**

De acuerdo con la banda de frecuencias que un filtro deja pasar, hay 4 tipos

4. Rechaza Banda (*Band-stop filter*)



Las señales en esta banda (entre las frecuencias de corte) "se rechazan".

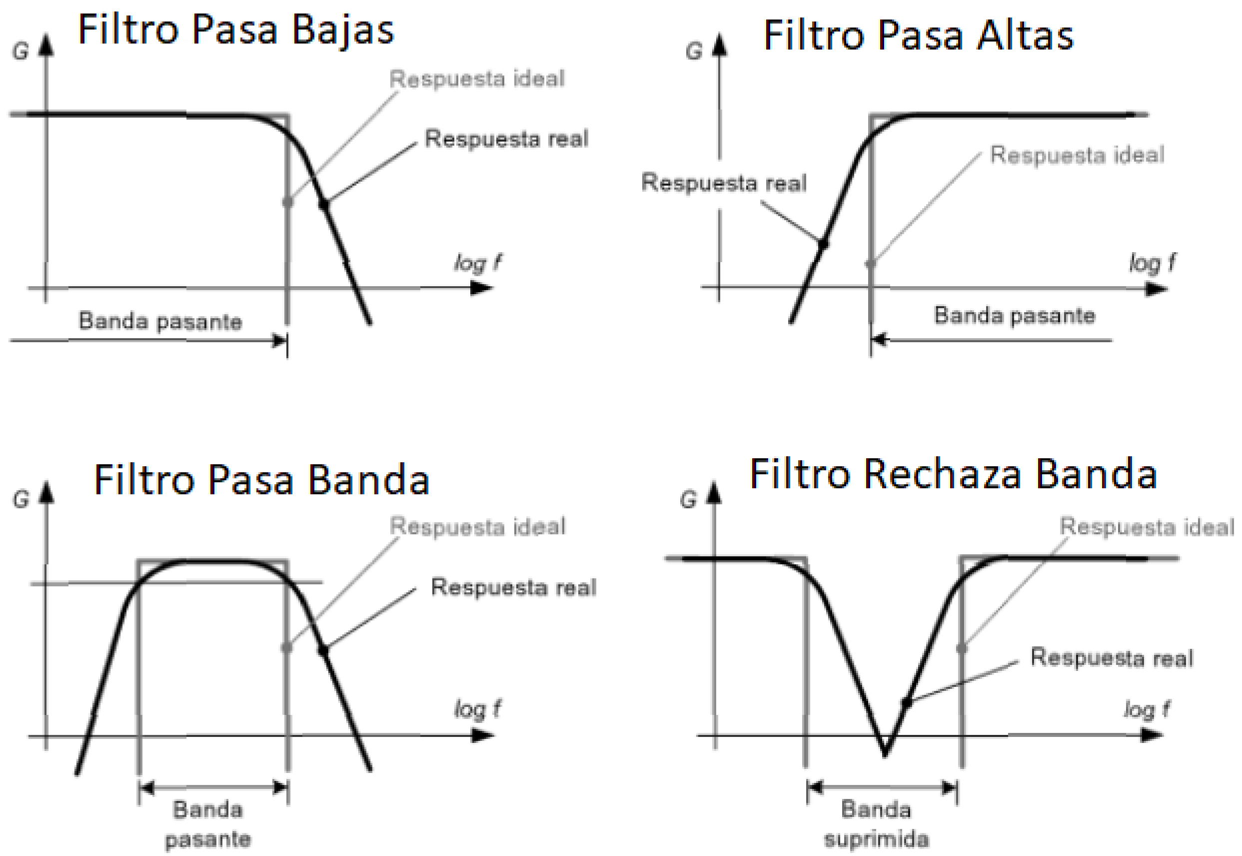
Evita el paso de señales entre dos determinadas frecuencias.

* Hay 2 frecuencias de corte, mínima y máxima

Filtraje de señales

- **Funciones de filtrado**

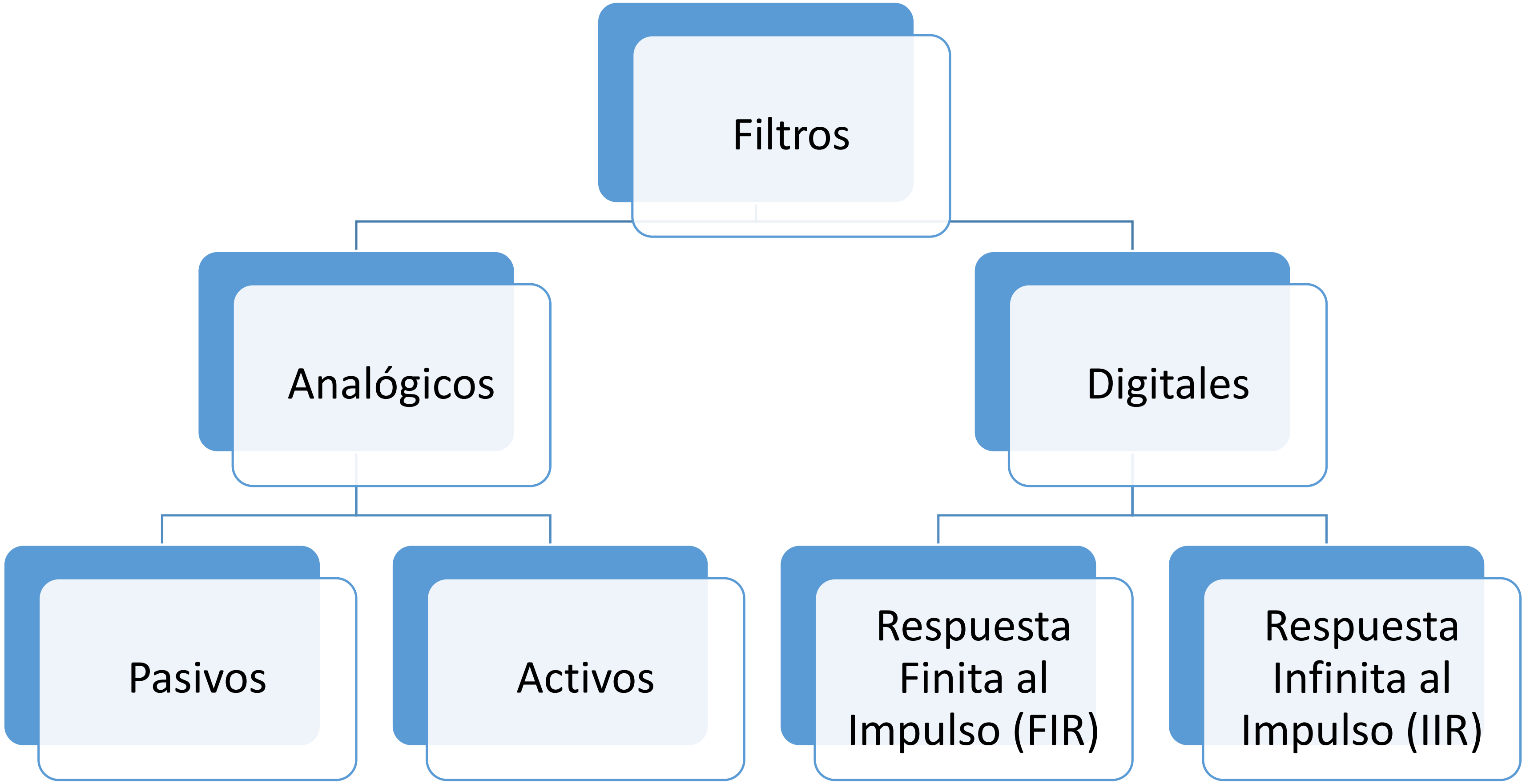
En la práctica, un **no es ideal** y se expresa matemáticamente mediante una función de transferencia.



Filtraje de señales

- **Clasificación de los filtros**

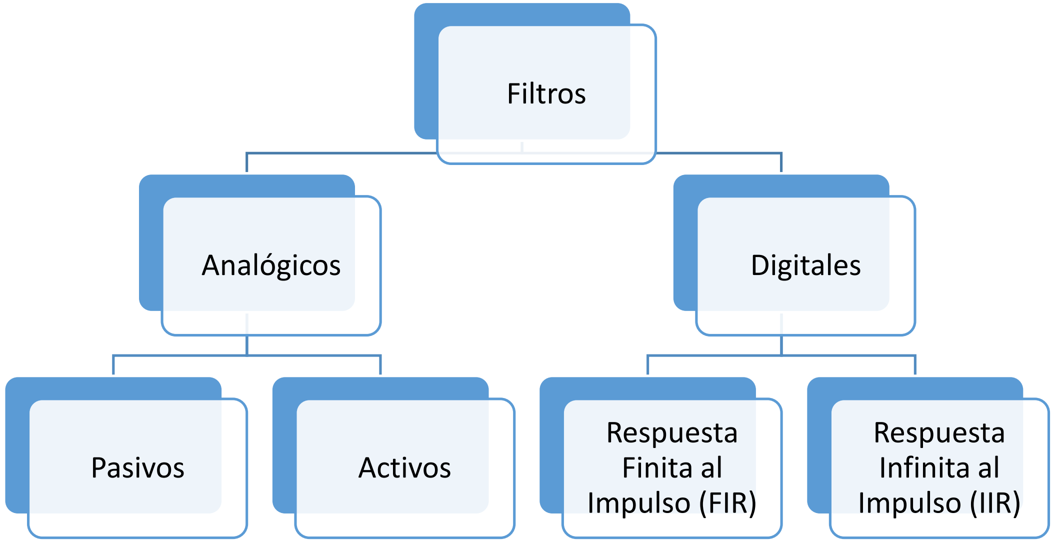
Para diseñar y construir tenemos la siguiente clasificación



Filtraje de señales

- **Clasificación de los filtros**

Para diseñar y construir tenemos la siguiente clasificación



FILTROS ANALÓGICOS

Se construyen con circuitos y dispositivos eléctricos y electrónicos

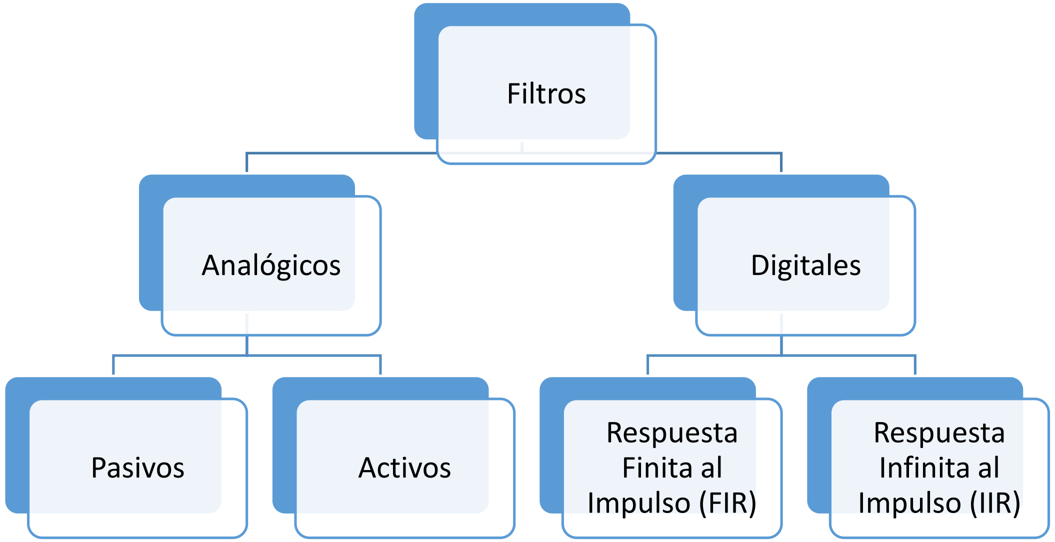
a) **Pasivos:** Emplean únicamente componentes pasivos -resistores, capacitores y/o inductores.-

b) **Activos**: Emplean componentes pasivos y circuitos amplificadores.

Filtraje de señales

- **Clasificación de los filtros**

Para diseñar y construir tenemos la siguiente clasificación



FILTROS DIGITALES

Se implementan mediante algoritmos computacionales

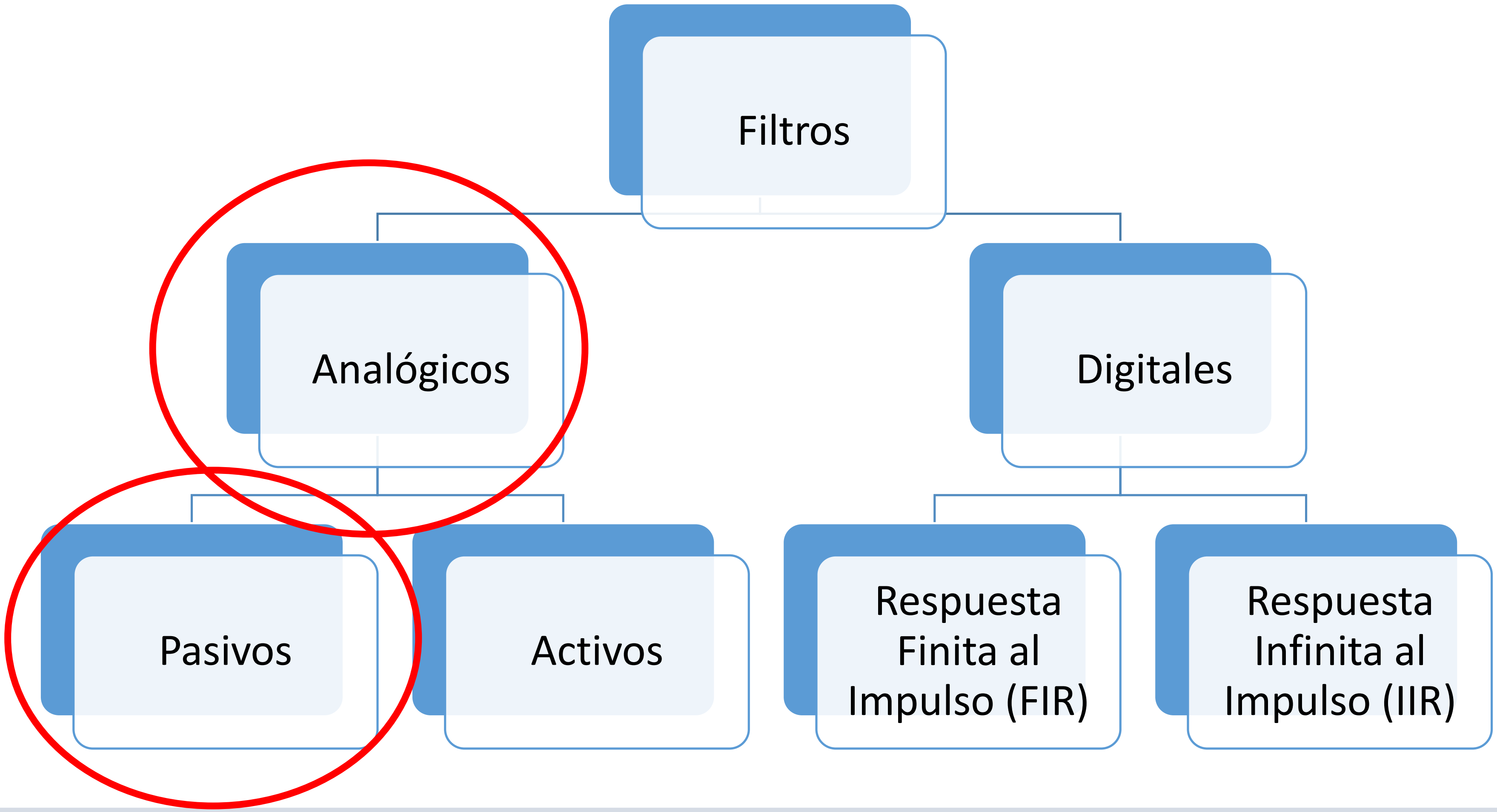
a) **FIR:** Tienen estructura no recursiva, la salida depende únicamente de la entrada presente.

b) **Activos**: Tienen estructura recursiva, la salida depende de la entrada presente y de las anteriores (TIEMPO REAL).

Filtraje de señales

- **Clasificación de los filtros**

NOS ENFOCAREMOS EN FILTROS ANALÓGICOS-PASIVOS



Filtraje de señales

- **Filtros analógicos pasivos**

Función de transferencia

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1}\, s^{m-1} + \cdots + a_0} = \frac{\text{Polinomio B de grado } n}{\text{Polinomio A de grado } m}$$

Un filtro es entonces:

- Un sistema continuo
- Lineal e invariente en el tiempo (LTI)
- Estable si en la FT $m > \mathrm{n}$

ORDEN DE UN FILTRO:

Grado (m) del polinomio del d denominador de la FT.

Mayor orden, mejor desempeño!

Filtraje de señales

- **Filtros analógicos pasivos**

Función de transferencia

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1}\, s^{m-1} + \cdots + a_0} = \frac{\text{Polinomio B de grado } n}{\text{Polinomio A de grado } m} \quad ; \quad s = j\omega$$

ORDEN DE UN FILTRO:

Ejemplo:

$1)\ G(s) = \frac{1}{1+0.1s}$ FILTRO DE PRIMER ORDEN

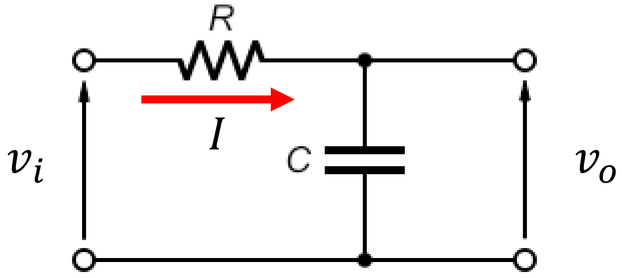
2) $G(s) = \frac{s+0.7}{s^2+7s+3}$ FILTRO DE SEGUNDO ORDEN

3) $G(s) = \frac{10}{s^3+0.14s\text{^}2+3s}$ FILTRO DE TERCER ORDEN

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Directamente podemos obtener la función de transferencia del circuito sabiendo que:

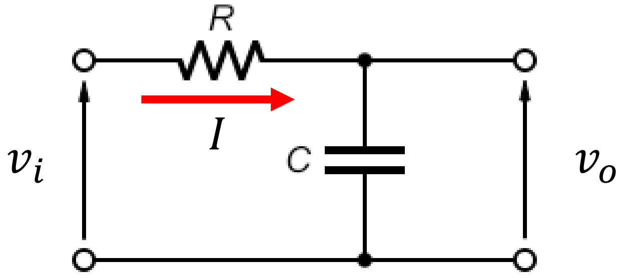
- ✓ El voltaje de salida es el voltaje del capacitor
- ✓ Y el voltaje de entrada es v_i
- ✓ La impedancia de un resistor es $Z_R = R$ y de un capacitor es $Z_C = 1/j\omega C$
- ✓ La corriente I en el circuito es la misma en R y C

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{I \cdot Z_C}{I \cdot Z_R + I \cdot Z_C}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Directamente podemos obtener la función de transferencia del circuito sabiendo que:

- Factorizando y simplificando a I

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

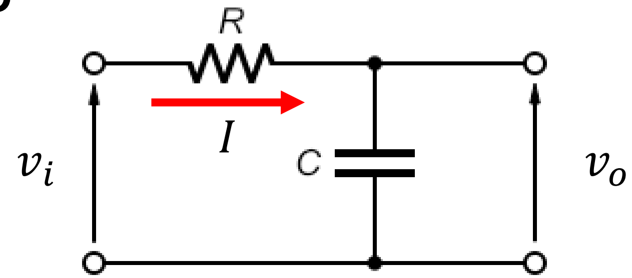
- Sustituyendo las impedancias y simplificando

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{\cancel{sC}}}{\frac{sRC + 1}{\cancel{sC}}} = \boxed{\frac{1}{1 + sRC}}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Analicemos esta última expresión en dos casos:

1. Sí $\omega \to 0$, es decir **Bajas Frecuencias**

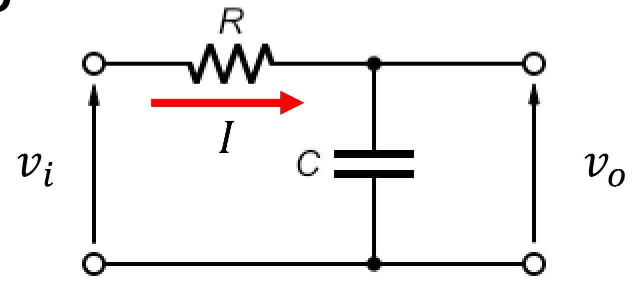
$$G(\omega \to 0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

La función de transferencia es igual a 1

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Analicemos esta última expresión en dos casos:

2. Sí $\omega \rightarrow \infty$, es decir **Altas Frecuencias**

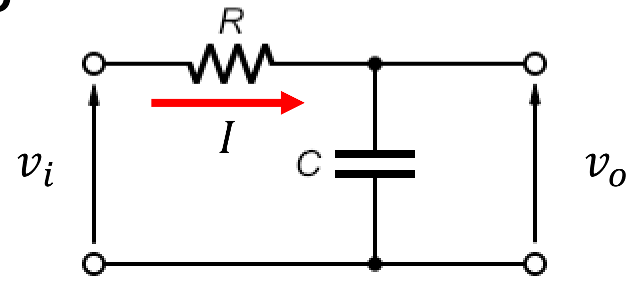
$$G(\omega \rightarrow \infty) = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

La función de transferencia es igual a cero

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

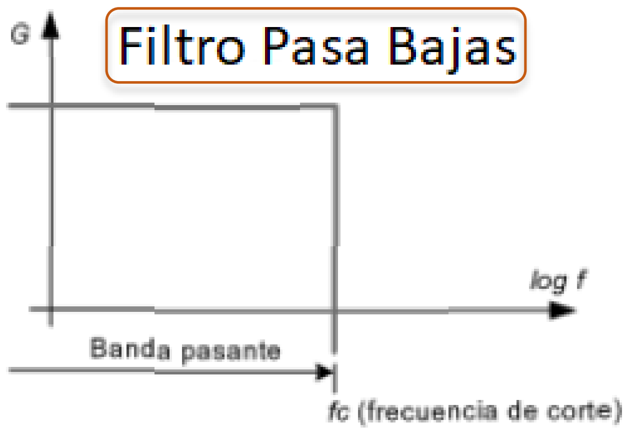
Consideremos el siguiente circuito



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Si graficamos los dos casos anteriores



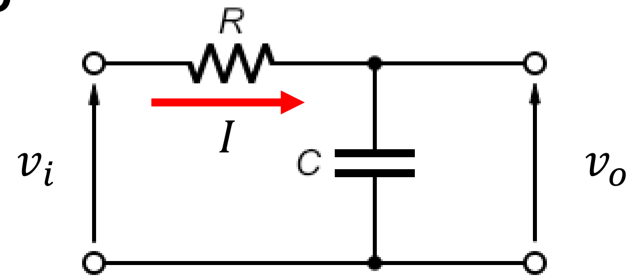
El circuito solo deja pasar bajas frecuencias

$$G(\omega \to 0) = \mathbf{1}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

Otra forma de analizar para saber que tenemos un filtro pasa bajas

El voltaje de salida v_o se mide en el capacitor cuya reactancia (impedancia) es

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

1. En bajas frecuencias $\omega \to 0$

$$X_C = \frac{1}{0} = \infty$$

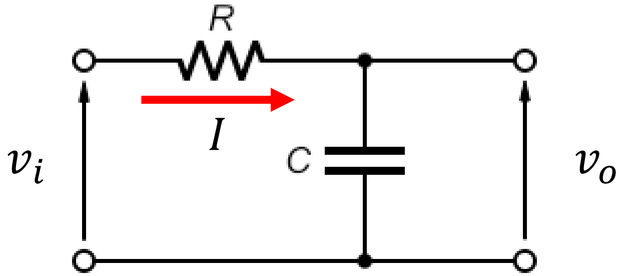
La impedancia es "infinita", no circula corriente y $\therefore v_o = v_i$

El capacitor es un circuito abierto

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

Otra forma de analizar para saber que tenemos un filtro pasa bajas

El voltaje de salida v_o se mide en el capacitor cuya reactancia (impedancia) es

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. En altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$

$$X_C = \frac{1}{\infty} = 0$$

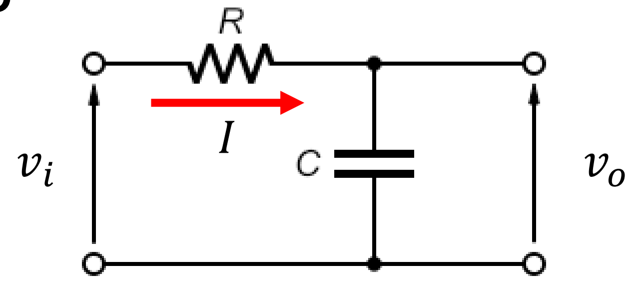
La impedancia es "nula", sí circula corriente y $\therefore v_o = IX_C = 0$

El capacitor es un corto circuito

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

CARACTERÍSTICAS:

- Potencia de salida

$$P = 20\log\left(\frac{v_o}{v_i}\right) \quad \text{con} \quad \frac{v_o}{v_i} = 1/\sqrt{2}$$

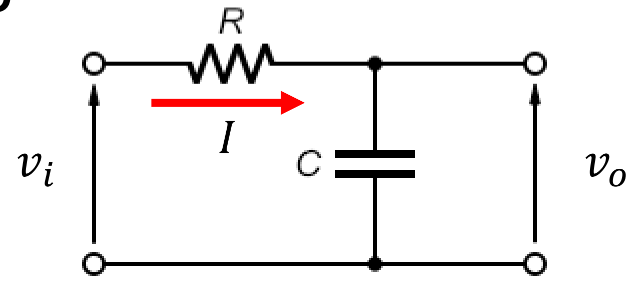
$$P = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{dB}$$

La potencia de la señal a la salida decae 3 decibeles

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

CARACTERÍSTICAS:

- Frecuencia de corte

De la expresión anterior y de la magnitud de la función de transferencia tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

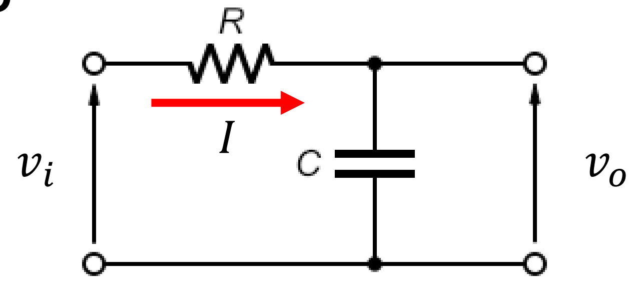
Igualando:

$$(\omega RC)^2 = 1$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

CARACTERÍSTICAS:

- Frecuencia de corte

De la expresión anterior y de la magnitud de la función de transferencia tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

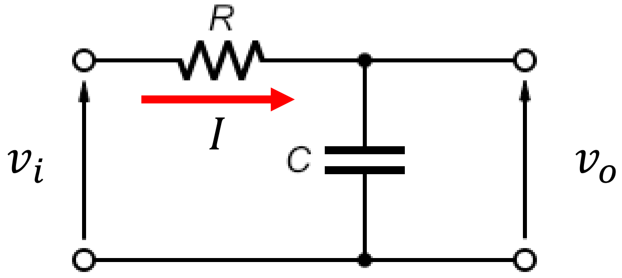
Despejando ω :

$$\omega = \frac{1}{RC}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}\ [\text{Hz}]$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Consideremos el siguiente circuito



Filtro pasa bajas

CARACTERÍSTICAS:

- Frecuencia de corte

$$\omega = \frac{1}{RC}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC}\ [\text{Hz}]$$

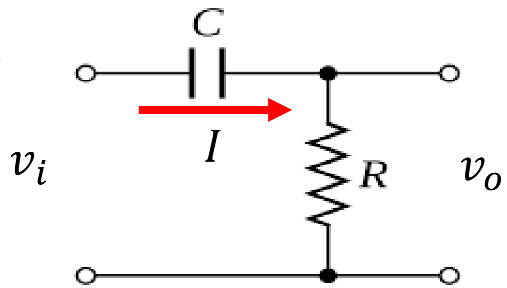
La frecuencia de corte está dada por el capacitor y la resistencia

Ej. La frecuencia de corte sí $R = 1\ k\Omega$ y $C = 1\mu F$ es $\boldsymbol{\omega = 1000\ [\mathbf{rad/s}]}$ **ó** $\boldsymbol{f}$ **=159.15 [Hz]**

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Directamente podemos obtener la función de transferencia del circuito sabiendo que:

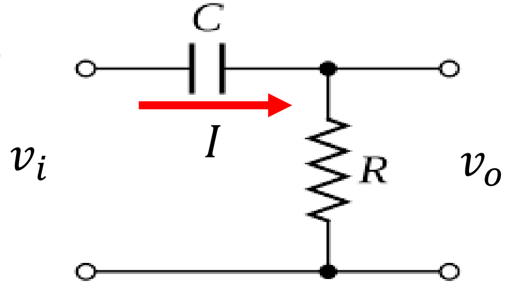
- ✓ El voltaje de salida es el voltaje del capacitor
- ✓ Y el voltaje de entrada es v_i
- ✓ La impedancia de un resistor es $Z_R = R$ y de un capacitor es $Z_C = 1/j\omega C$
- ✓ La corriente I en el circuito es la misma en R y C

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{I \cdot Z_R}{I \cdot Z_R + I \cdot Z_C}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Directamente podemos obtener la función de transferencia del circuito sabiendo que:

- Factorizando y simplificando a I

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

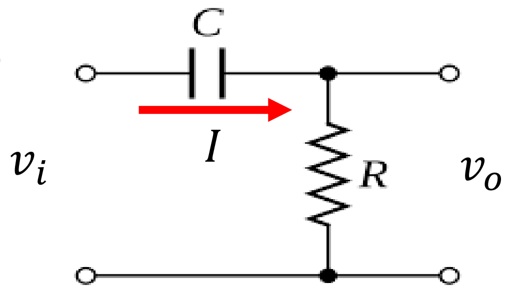
- Sustituyendo las impedancias y simplificando

$$G(s) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \boxed{\frac{sRC}{1 + sRC}}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Analicemos esta última expresión en dos casos:

1. Sí $\omega \to 0$, es decir **Bajas Frecuencias**

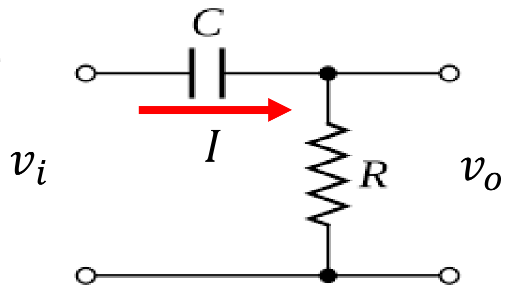
$$G(\omega \to 0) = \frac{0}{1+0} = 0$$

La función de transferencia es igual a 0

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Analicemos esta última expresión en dos casos:

2. Sí $\omega \rightarrow \infty$, es decir **Altas Frecuencias**

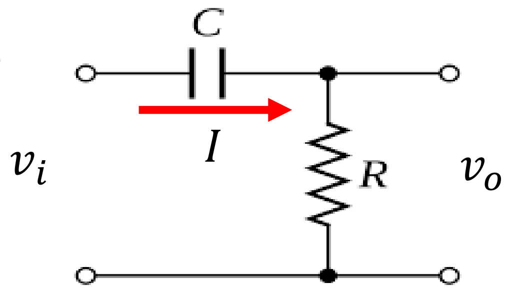
$$G(\omega \rightarrow \infty) = \frac{\infty}{\infty} = 1$$

La función de transferencia es igual a uno

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

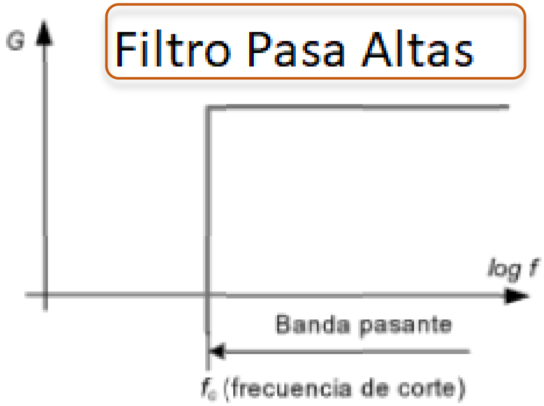
Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Además, sabemos que $s = j\omega$. Donde ω es la frecuencia en rad/s

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

Si graficamos los dos casos anteriores



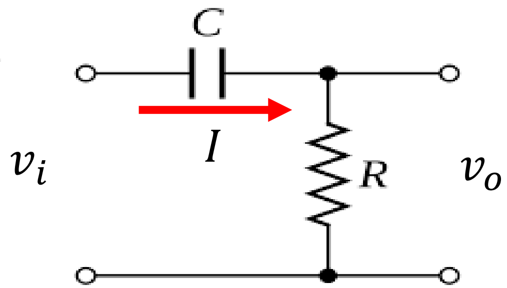
El circuito solo deja pasar altas frecuencias

$$G(\omega \to \infty) = \mathbf{1}$$

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Filtro pasa altas

Otra forma de analizar para saber que tenemos un filtro pasa altas

El voltaje de salida v_o está determinado por el capacitor cuya reactancia (impedancia) es

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

1. En bajas frecuencias $\omega \to 0$

$$X_C = \frac{1}{0} = \infty$$

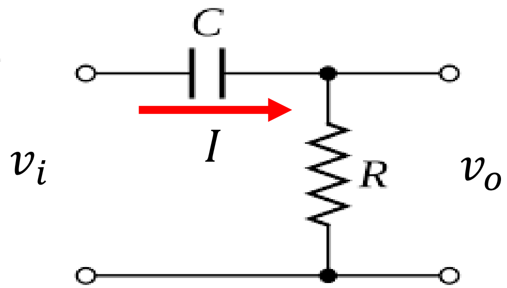
La impedancia es "infinita", no circula corriente y $\therefore v_o$=0

El capacitor es un circuito abierto

Filtraje de señales

- **Diseño y análisis de filtros analógicos pasivos**

Veamos otro circuito (la posición de R y C ahora cambiaron)



Filtro pasa altas

Otra forma de analizar para saber que tenemos un filtro pasa altas

El voltaje de salida v_o está determinado por el capacitor cuya reactancia (impedancia) es

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

2. En altas frecuencias $\omega \rightarrow \infty$

$$X_C = \frac{1}{\infty} = 0$$

La impedancia es "nula", y $\therefore v_o = v_i$

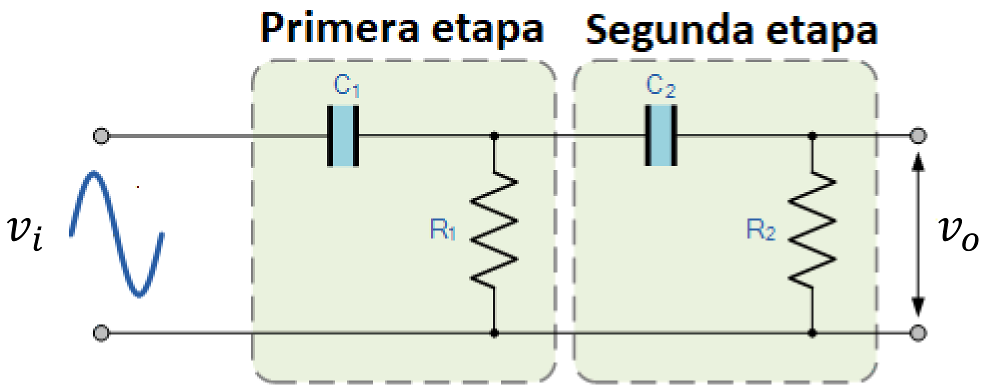
El capacitor es un corto circuito

Filtraje de señales

- **Filtros de orden > 1**

Los filtros anteriores fueron pasivos de primer orden (polinomio del denominador)

✓ El orden del filtro está dado por tantos pares RC hay en el circuito llamadas etapas



Por ej. Este es un filtro de pasa altas de **segundo** orden!

Filtraje de señales

- **Filtros de orden > 1**

Los filtros anteriores fueron pasivos de primer orden (polinomio del denominador)

- ✓ Teóricamente podemos diseñar filtros de orden n. Sin embargo, su complejidad de análisis aumenta.
- ✓ Para diseñar filtros de orden superior podemos recurrir a “plantillas” ya establecidas.
- ✓ Las plantillas son polinomios que aproximan correctamente el orden del filtro.
- ✓ Los coeficientes del polinomio ya están calculados y existen varias aproximaciones

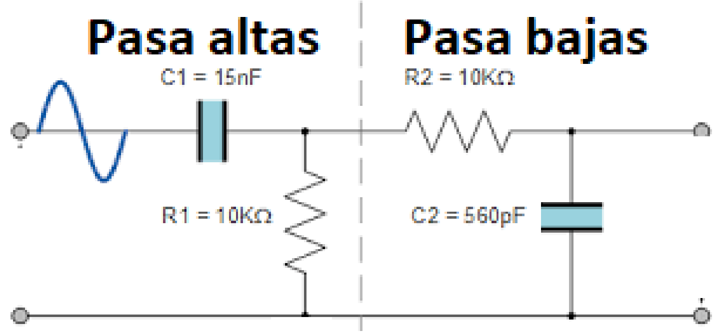
Butterworth, Chebyshev, Elíptica, Bessel, etc

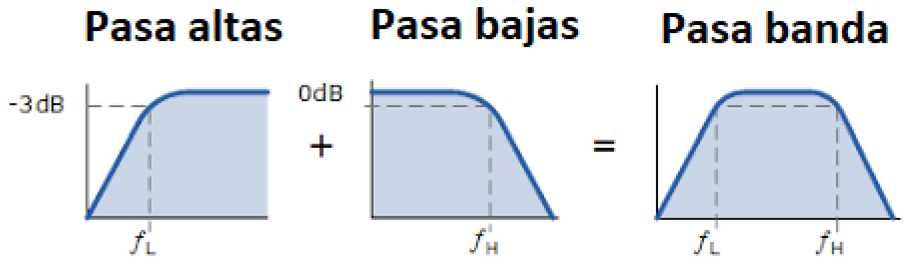
Filtraje de señales

- **Filtros pasa banda y rechaza banda**

Se construyen combinando filtros pasa bajas y pasa altas

Filtro pasa banda





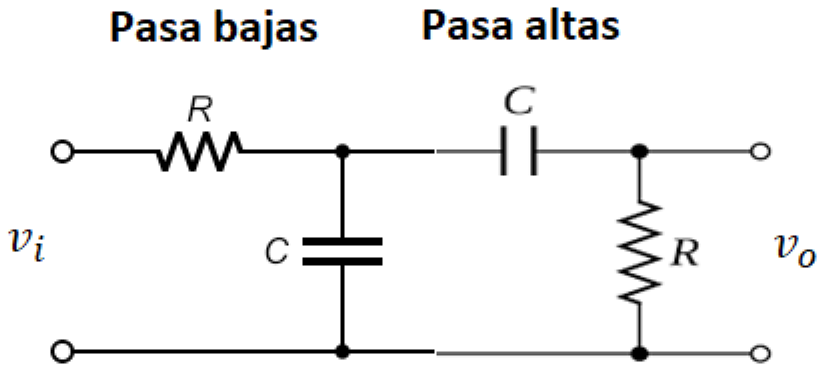
Se calculan dos frecuencias de corte, una por cada etapa, igual a como lo hicimos anteriormente

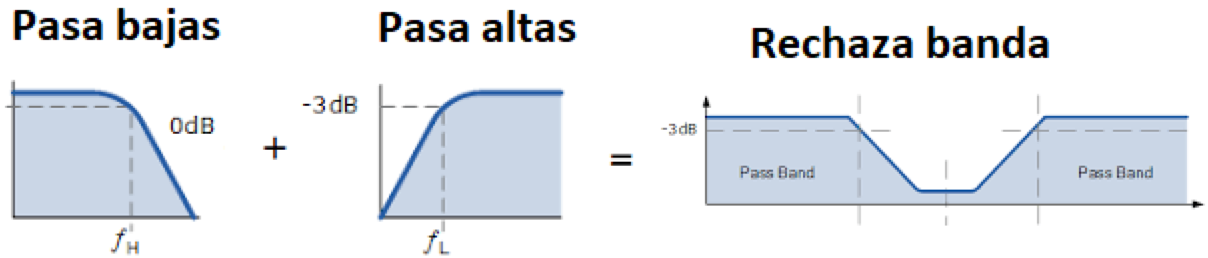
Filtraje de señales

- **Filtros pasa banda y rechaza banda**

Se construyen combinando filtros pasa bajas y pasa altas

Filtro rechaza banda





Se calculan dos frecuencias de corte, una por cada etapa, igual a como lo hicimos anteriormente